COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a IX-a

Subiectul 1.

a) Fie $MNPQ$ un paralelogram și punctele $A, B \in MN, C, D \in NP$ în ordinea A, M, N, B și respectiv C, N, P, D, astfel încât $[MA] \equiv [MB]$ și $[CP] \equiv [PD]$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 2 \cdot \overrightarrow{NQ}.$$

b) Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ de centru O. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$. Arătați că: $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PO}$.

Subiectul 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $16 \cdot \{x\}^2 - 8x + 1 = 0$, unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a.

Subiectul 3. Determinați funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x + y) = 2017x + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Subiectul 4. Arătaţi că pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq \frac{2x + y + z}{y + z} + \frac{x + 2y + z}{x + z} + \frac{x + y + 2z}{x + y} + 3.$$

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

Subiectul 1.

a) Fie $MNPQ$ un paralelogram și punctele $A, B \in MN, C, D \in NP$ în ordinea A, M, N, B și respectiv C, N, P, D, astfel încât $[MA] \equiv [MB]$ și $[CP] \equiv [PD]$. Arătați că

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 2 \cdot \overrightarrow{NQ}.$$

b) Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ de centru O. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$. Arătați că: $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PO}$.

Soluţie: a) Fie $X \in (MNPQ)$. Cum M și P sunt mijloacele lui AB și CD $\Rightarrow$

$\overrightarrow{XP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD})$, $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ **(1p)**

Luăm $X \equiv N \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}), \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) \Rightarrow 2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NM}) = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = 2\overrightarrow{NQ}$. **(1p)**

b) Ducem prin P paralele la laturile triunghiului şi notăm intersecţiile paralelelor cu laturile A_2A_3 A_1A_3, respectiv A_1A_2 cu M, Q, N, T, respectiv S, R. Avem că PP_1 mediană în triunghiul echilateral PMQ $\Rightarrow \overrightarrow{PP_1} = \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PQ}}{2}$. Analog $\overrightarrow{PP_2} = \frac{\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PT}}{2}$, $\overrightarrow{PP_3} = \frac{\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}}{2}$. **(3p)**

$2(\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}) = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PT}) + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{PA_3} + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2} = 3\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{0} \Rightarrow$ concluzia. **(2p)**

Subiectul 2. . Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $16 \cdot \{x\}^2 - 8x + 1 = 0$, unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a.

Soluţie: Cum $x = \frac{1}{8}(1 + 16\{x\}^2) \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{17}{8}\right) \Rightarrow [x] \in \{0, 1, 2\}$. **(3p)**

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = x \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. **(1p)**

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow x = 1 + \{x\} \Rightarrow 16\{x\}^2 - 8\{x\} - 7 = 0 \Rightarrow \{x\} = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{5+2\sqrt{2}}{4}$ sau $\{x\} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \notin [0, 1) \Rightarrow$ nu avem soluție. **(1,5p)**

Dacă $[x] = 2 \Rightarrow x = 2 + \{x\} \Rightarrow 16\{x\}^2 - 8\{x\} - 15 = 0 \Rightarrow \{x\} = \frac{1 \pm 4}{4} \notin [0, 1) \Rightarrow$ nu avem soluție. $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5+2\sqrt{2}}{4}\right\}$. **(1,5 p)**

Subiectul 3. Determinați funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x+y)=2017x+f(y)$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Soluţie:

Fie $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Trecem $y\to -x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **(1p)**

Avem $f(0)=2017x+f(-x)$, trecem $x\to -x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)=2017x+f(0)$ **(2p)**
Notăm $f(0)=a\in\mathbb{R}$
Avem $f(x)=2017x+a,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **(1p)**
Fie $t\in\mathbb{Q}$ și $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Trecem $y\to t-x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ în relația din enunț. **(2p)**
Atunci $f(t)=2017x+f(t-x)=2017x+2017(t-x)+a=2017t+a\ \forall t\in\mathbb{Q}$.
Deci $f(x)=2017x+a,\forall x\in\mathbb{R}$. **(1p)**

Subiectul 4. Arătaţi că pentru orice $x,y,z\in(0,\infty)$ are loc inegalitatea

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq\frac{2x+y+z}{y+z}+\frac{x+2y+z}{x+z}+\frac{x+y+2z}{x+y}+3.$$

Soluţie:

Inegalitatea din enunț se rescrie:

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+\frac{x+z}{y+x}+\frac{y+x}{x+z}+\frac{z+x}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+3.$$ **(2p)**

Arătăm că $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+1$ adică $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y^2}{y^2}\geq\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+2.$ **(2p)**
Avem $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y^2}{y^2}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{yz}+\frac{z^2}{xz}+\frac{y^2}{y^2}\geq\frac{(x+2y+z)^2}{xy+yz+zx+y^2}=\frac{(x+2y+z)^2}{(x+y)(y+z)}=\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+2$ **(2p)**
Analog celelalte două inegalități și prin însumarea lor rezultă cerința. **(1p)**